

Числа по кругу

Утверждение. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Тогда пар рядом сидящих детей разного пола — четное количество. А если мальчиков и девочек не поровну, то найдется пара рядом сидящих детей одного пола.

1. По кругу стоят мальчики и девочки, всего 33 человека. Докажите, что найдутся дети одного пола, между которыми (a) ровно один; (b) ровно два человека.
2. По кругу написаны все целые числа от 1 по 200 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, чётна.
3. Каждое число по кругу есть сумма двух следующих за ним по часовой стрелке (всего не менее трех чисел по кругу). (a) Докажите, что сумма всех чисел равна 0. (b) Докажите, что все числа равны 0.
4. По кругу записаны несколько чисел (не обязательно целые), не все из них одинаковы. Сумма любых пяти подряд равна 73. Докажите, что количество чисел кратно 5.
5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записали по кругу в некотором порядке. Назовём записанное число хорошим, если оно равно сумме двух чисел, записанных рядом с ним. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел среди записанных?
6. По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?
7. По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечетными знаменателями, большими 10^{10} . Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?

Числа по кругу

Утверждение. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Тогда пар рядом сидящих детей разного пола — четное количество. А если мальчиков и девочек не поровну, то найдется пара рядом сидящих детей одного пола.

1. По кругу стоят мальчики и девочки, всего 33 человека. Докажите, что найдутся дети одного пола, между которыми (a) ровно один; (b) ровно два человека.

2. По кругу написаны все целые числа от 1 по 200 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, чётна.

3. Каждое число по кругу есть сумма двух следующих за ним по часовой стрелке (всего не менее трех чисел по кругу). (a) Докажите, что сумма всех чисел равна 0. (b) Докажите, что все числа равны 0.

4. По кругу записаны несколько чисел (не обязательно целые), не все из них одинаковы. Сумма любых пяти подряд равна 73. Докажите, что количество чисел кратно 5.

5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записали по кругу в некотором порядке. Назовём записанное число хорошим, если оно равно сумме двух чисел, записанных рядом с ним. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел среди записанных?

6. По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?

7. По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечетными знаменателями, большими 10^{10} . Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?